Практика IV
Численное дифференцирование и интегрирование

П р и м е р. Вычислить в точке $x = 0.1$ первую и вторую производные функции, заданной в табличной форме (таблица 4.1).

Таблица 4.1

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	1.2833	1.8107	2.3606	2.9577	3.5969	4.2833

Для вычисления производной функции заданной в виде таблицы воспользуемся интерполяцией этой функции многочленом Ньютона. Здесь $h = 0.1$, $t = (0.1 - 0)/0.1 = 1$. Вычислим конечные разности и занесем их в таблицу:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1.2833	0.5274	0.0325	0.0047	0.0002	0.0000
0.1	1.8107	0.5599	0.0372	0.0049	0.0002	
0.2	2.3606	0.5971	0.0421	0.0051		
0.3	2.9577	0.6392	0.0472			
0.4	3.5969	0.6864				
0.5	4.2833					

Используя формулы:

$$y' \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \right.$$
$$+ \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!}\Delta^4 y_0 +$$
$$\left. + \frac{5t^4-40t^3+105t^2-100t+24}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots\right)$$

$$y'' \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + \frac{6t-6}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{12t^2-36t+22}{4!}\Delta^4 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{20t^3-120t^2+210t-100}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots\right)$$

находим

$$y' \approx 10\left(0.5274 + \frac{2\cdot1-1}{2}\cdot0.0325 + \frac{3\cdot1-6\cdot1+2}{6}\cdot0.0047 + \right.$$
$$\left. + \frac{4\cdot1-18\cdot1+22\cdot1-6}{24}\cdot0.0002\right) = 5.436$$

$$y'' \approx 100\left(0.0325 + \frac{6\cdot1-6}{6}\cdot0.0047 + \frac{12-36+22}{24}\cdot0.0002\right) = 3.25.$$

П р и м е р. Найти выражение для производной y'_1 в случае четырех равноотстоящих узлов ($n = 3$) используя *метод неопределенных коэффициентов*.

Приближенное значение производной запишем в виде

$$y'_1 \approx c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3. \qquad \text{(IV.1)}$$

Используем следующие многочлены:

$$y = 1, \quad y = x - x_0, \quad y = (x - x_0)^2, \quad y = (x - x_0)^3. \qquad \text{(IV.2)}$$

Вычислим их производные:

$$y' = 0, \quad y' = 1, \quad y' = 2(x - x_0), \quad y' = 3(x - x_0)^2. \qquad \text{(IV.3)}$$

Подставляем последовательно соотношения (IV.2) и (IV.3) соответственно в правую и левую части (IV.1) при $x = x_1$:

$$0 = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1,$$
$$1 = c_0(x_0 - x_0) + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_0) + c_3(x_3 - x_0),$$
$$2(x_1 - x_0) = c_0(x_0 - x_0)^2 + c_1(x_1 - x_0)^2 + c_2(x_2 - x_0)^2 + c_3(x_3 - x_0)^2,$$
$$3(x_1 - x_0)^2 = c_0(x_0 - x_0)^3 + c_1(x_1 - x_0)^3 + c_2(x_2 - x_0)^3 + c_3(x_3 - x_0)^3.$$

Получаем окончательно систему уравнений в виде

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$
$$hc_1 + 2hc_2 + 3hc_3 = 1,$$
$$hc_1 + 4hc_2 + 9hc_3 = 2,$$
$$hc_1 + 8hc_2 + 27hc_3 = 3.$$

Решая эту систему, получаем

$$c_0 = -\frac{1}{3h}, \quad c_1 = -\frac{1}{2h}, \quad c_2 = \frac{1}{h}, \quad c_3 = -\frac{1}{6h}$$

Подставляя эти значения в (IV.1), находим выражение для производной:

$$y_1^{/} \approx \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3)$$

П р и м е р. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Этот интеграл легко вычислить аналитически, используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$I = \operatorname{arctg} x|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398.$$

Используем теперь для вычисления данного интеграла формулы прямоугольников и трапеций. Разобьем отрезок интегрирования [0,1] на десять равных частей: $n = 10$, $h = 0.1$. Вычислим значения подынтегральной функции $y_i = 1/(1 + x_i^2)$ в точках разбиения $x_i = x_{i-1} + h$, а также в полуцелых точках $x_{i-1/2} = x_{i-1} + h/2$ ($i = 1, 2,..., 10$) и занесем результаты вичислений в таблицу:

i	x_i	y_i	$x_{i-1/2}$	$y_{i-1/2}$
0	0.0	1.000000		
1	0.1	0.990099	0.05	0.997506
2	0.2	0.961538	0.15	0.977995
3	0.3	0.917431	0.25	0.941176
4	0.4	0.862069	0.35	0.890868
5	0.5	0.800000	0.45	0.831601
6	0.6	0.735294	0.55	0.767754
7	0.7	0.671141	0.65	0.702988
8	0.8	0.609756	0.75	0.640000
9	0.9	0.552486	0.85	0.580552
10	1.0	0.500000	0.95	0.525624

По формуле прямоугольников получим

$$I_1 = h\sum_{i=1}^{10} y_{i-1/2} = 0.1 \cdot (0.997506 + \ldots + 0.525624) = 0.785606.$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет $\Delta I = I - I_1 = -0.00021$ (около 0.027 %).

Используя формулу трапеций, находим

$I_2 = 0.1 \cdot (0.750000 + 0.990099 + ... + 0.552486) = 0.784981$.

Погрешность здесь равна $\Delta I_2 = 0.00042$ (около 0.054 *%).*

!!! *В нашем примере лучшую точность вычисления интеграла дает формула прямоугольников. Это, на первый взгляд, неожиданный результат, поскольку формула прямоугольников использует интерполяцию нулевого порядка (кусочно-постоянную), в то время как формула трапеций использует кусочно-линейную интерполяцию. Повышение точности здесь объясняется способом вычисления элементарных площадей, использующим значения функции в центральной точке $x_{i-1/2}$ отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Заметим, что использование формул прямоугольников, где в качестве точек ζ_i выбраны левые или правые границы элементарных отрезков приведет к* *погрешности более 3 %* ¡¡¡.

Мы помним, что погрешность численного интегрирования определяется шагом разбиения. Уменьшая этот шаг, можно добиться большей точности. Правда, увеличивать число точек не всегда возможно. Если функция задана в табличном виде, приходится, как правило, ограничиваться данным множеством точек. Повышение точности может быть в этом случае достигнуто за счет повышения степени используемых интерполяционных многочленов. Рассмотрим способ численного интегрирования с использованием квадратичной интерполяции (метод Симпсона).

Применяя метод Симпсона, находим

$$I = \frac{0.1}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + \\ + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + y_{10}] = \ldots = 0.785398.$$

!!! *Результат численного интегрирования с использованием метода Симпсона совпадает с точным значением (шесть значащих цифр).* ¡¡¡

Д.З.

Вычислить $\int_0^1 e^{x^2}dx$ **, используя методы прямоугольников, трапеций и Симпсона.**