

уравнений

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= 0, \\ F_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Пусть приближенные значения неизвестных равны a, b . Предположим, что якобиан системы (24) при $x = a, y = b$ отличен от нуля, т. е.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда следующие приближения неизвестных можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= a - \frac{1}{J} \left(F_1 \frac{\partial F_2}{\partial y} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ y &= b + \frac{1}{J} \left(F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Величины, стоящие в правых частях, вычисляются при $x = a, y = b$.

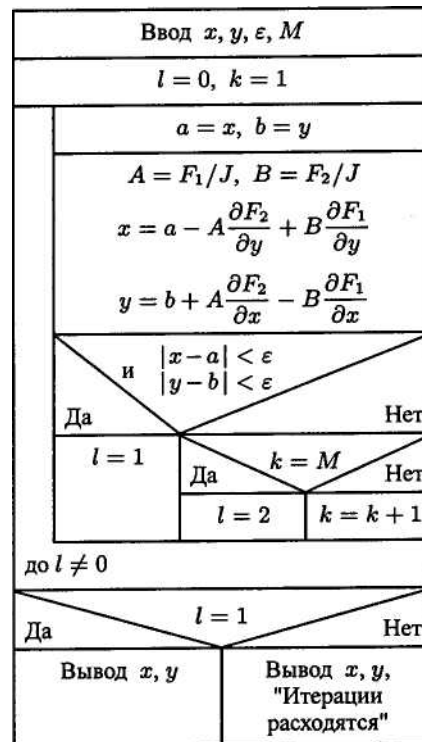


Рис. 5. Метод Ньютона для системы двух уравнений

Алгоритм метода Ньютона для решения системы двух уравнений изображен на рис. 5. В качестве исходных данных задаются начальные приближения неизвестных x, y , погрешность ε и допустимое число итераций M . В условной конструкции, проверяющей выполнение критерия завершения итераций, используется логическая операция «и», имеющаяся в современных языках программирования. Если итерации сойдутся, то выводятся значения x, y ; в противном случае – текущие значения x, y и соответствующее сообщение.

Упражнения

1. Методом деления отрезка пополам найти с погрешностью 10^{-3} хотя бы один корень уравнений:
а) $2e^x = 5x$; б) $x^2 \cos 2x = -1$.
2. Записать алгоритм решения уравнения методом хорд.
3. Найти с погрешностью 10^{-3} методом хорд хотя бы один корень уравнений:
а) $2x - \lg x - 7 = 0$; б) $\operatorname{ctg} x - 0,1 = 0$.
4. Записать алгоритм решения уравнения методом Ньютона.
5. Используя метод Ньютона, найти с погрешностью 10^{-3} хотя бы один корень уравнений:
а) $\operatorname{tg}(0,55x + 0,1) = x^2$; б) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$.
6. Сравнить число итераций, необходимых для достижения заданной точности, в методах деления отрезка пополам, хорд и Ньютона на примере решения одного из уравнений, приведенных в упр. 1, 3, 5.
- 7*. Определить, при каких начальных приближениях метод Ньютона будет сходиться для уравнения $\operatorname{arctg} x = 0$.
8. С помощью метода простой итерации найти с погрешностью 10^{-3} хотя бы один корень уравнений:
а) $5x - 8 \ln x = 8$; б) $x^2 = \sin x$; в)* $x e^{2x} - 2 = 0$.
9. Определить глубину погружения деревянного шара радиуса 20 см, плавающего в воде. Плотность дерева $0,75 \text{ г/см}^3$.
10. Найти процентное содержание углекислого газа в реакции $2\text{CO} + \text{O}_2 \leftrightarrow 2\text{CO}_2$, которое определяется уравнением $(p/k^2 - 1)x^3 + 3x - 2 = 0$, где p – давление, k – постоянная равновесия. Принять $p = 1$, $k = 1,648$.
11. Записать алгоритмы решения системы уравнений методом простой итерации и методом Зейделя.
12. Используя метод простой итерации и метод Зейделя, найти с погрешностью 10^{-3} хотя бы одно решение систем уравнений:
а) $x = y + \sin xy,$
 $y = x + \cos(x + y);$ б) $x - \operatorname{arctg} x - 0,2y \sin y + 1 = 0,$
 $y - \operatorname{arctg} y - 0,3x \cos x - 1 = 0.$