3. Дифференцирование и интегрирование (1).

3.2. Численное интегрирование.

3.2.1. $y = f(x)$ $\quad x \in [a, b]$

Разобьем $[a, b]$ на n элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

$x_0 = a$, $x_n = b$

Выберем произвольную точку ξ_i $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$

$$S_i = f(\xi_i)\Delta x_i$$

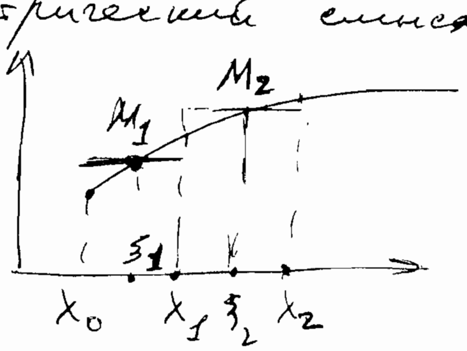
$$S_n = S_1 + S_2 \dots S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$ — интегральная сумма

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки, ни от выбора точек ξ_i.

Геометрический смысл:



Т.е. S_i описывают площади элементарных прямоугольников

Интегральная сумма — площадь ломаной фигуры

Предел интегральной суммы — площадь криволинейной трапеции под кривой. Она равна определенному интегралу.

Если подинт. функция задана в аналит. виде, то можно использовать формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

F — первообразная.

Почти всегда в практических случаях этой формулой воспользоваться нельзя:

1. Вид $f(x)$ не допускает аналитического нахождения первообразной
2. $f(x)$ задана только на конечном мн-ве x_i, таблично.

Тогда используются методы численного интегрирования. например, представление ф-ии в виде степенного ряда.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \int_0^1 \left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots\right)dx \approx 0.7468$$

Более общий случай: аппроксимация подинтегральной ф-ии с помощью интерполяционных многочленов. Получаем разные методы: прямоугольников, трапеций, парабол, сплайнов и т.д.

3.2.2. Методы прямоугольников и трапеций

<u>Метод прямоугольников</u> использует ~~данную~~ ~~ин~~интегральную сумму непосредственно;

$$\int_a^b f(x)dx = \overset{\Delta x_i}{h_1} y_0 + h_2 y_1 + \dots h_n y_{n-1}$$ — в кач-ве

ξ_i взяты левые границы элементарных отрезков

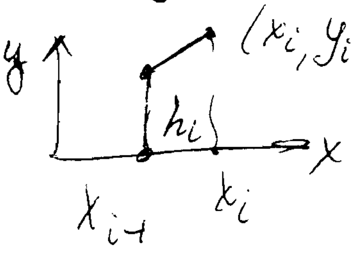
$$\int_a^b f(x)dx = h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots h_n y_n$$ — ξ_i — правые границы.

Более точным (а поэтому более применимым на практике) яв-ся выбор ξ_i в средних точках эл. отрезков)

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_{i-1/2}), \text{ где } x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-1} + h_i/2$$

метод средних $\qquad i = 1, 2, \dots, n$

<u>Метод трапеций</u>



, т.е. используем линейную интерполяцию

$$S_i = \frac{y_{i-1}+y_i}{2} h_i$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i)$$

Для $h_1 = h_2 = \dots h_n$ — const

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$$ — для м. прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{y_0+y_n}{2} + \sum^{n} y_i\right]$$ — для м. трапеций.

4

Пример. Вычислить $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$I = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398$

Возьмем $h = 0.1$, т.е. $n = 10$

По ф-ле прямоугольников

$I_1 = h \sum_{i=1}^{10} y_{i-1/2} = 0.1(0.997506 + \ldots 0.525624) = 0.785606$

(погрешность $0.00021 \approx 0.027\%$)

По ф-ле трапеций

$I_2 = h\left[\sum_{i=1}^{10} y_i + (y_0 + y_n)/2\right] = 0.1(0.750000 + \ldots$

$\ldots 0.552486) = 0.784981$ (погрешность $-0.00042 \approx 0.054\%$)

У I_1 точность выше за счет выбора точек посередине.

В общем виде погрешность:

$R_n = \int_a^b f(x)dx - S_n$, может быть представлена как $R_n = O(h^k)$, т.е. зависит от шага. Если $h \neq const$, берем max h_i

Главный член для прямоугольников: $\frac{1}{24} h_i^3 f''(x_{i-1/2})$

для трапеций: $-\frac{1}{12} h_i^3 f''(x_i)$.

Уточненная формула вычисления опр. инт.

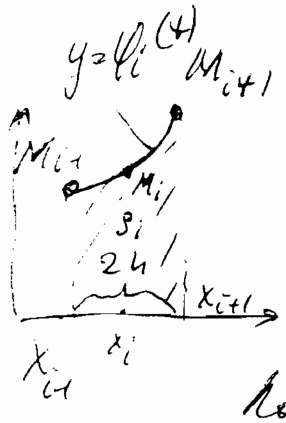
$I \approx (2\underset{\text{прямоуг.}}{I_1} + \underset{\text{трап.}}{I_2})/3$, т.е. уничтожаем гл. член погрешности

Для нашего примера:

$I = \frac{2 \cdot 0.785606 + 0.784981}{3} = 0.785398$ точность до погр. округления

Метод Симпсона

Отрезок инт-ия $[a, b]$ разбиваем на n равных частей с шагом h. На каждом от-ке $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \ldots, [x_{n-2}, x_n]$ подинтегр. ф-ция $f(x)$ заменим многочленом второй степ.



$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad x_{i-1} < x < x_{i+1}$$

Коэф a, b, c найдем из условия равенства

$$\varphi_i(x_i) = y_i$$

В кач-ве φ_i возьмем интерполяц. многочл. Лагранжа второй степени. Узлы:

$M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$

$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} y_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} y_{i+1}$$

$$x_{i+1}-x_i = x_i - x_{i-1} = h$$

На эл. отрезке получим:

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)\,dx = \frac{1}{2h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[(x-x_i)(x-x_{i+1})y_{i-1} - 2(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})y_i + (x-x_{i-1})(x-x_i)y_{i+1}\right]dx =$$

$$= \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$$

Суммируя все S_i получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots y_{n-2}) + y_n\right]$$

Формула Симпсона

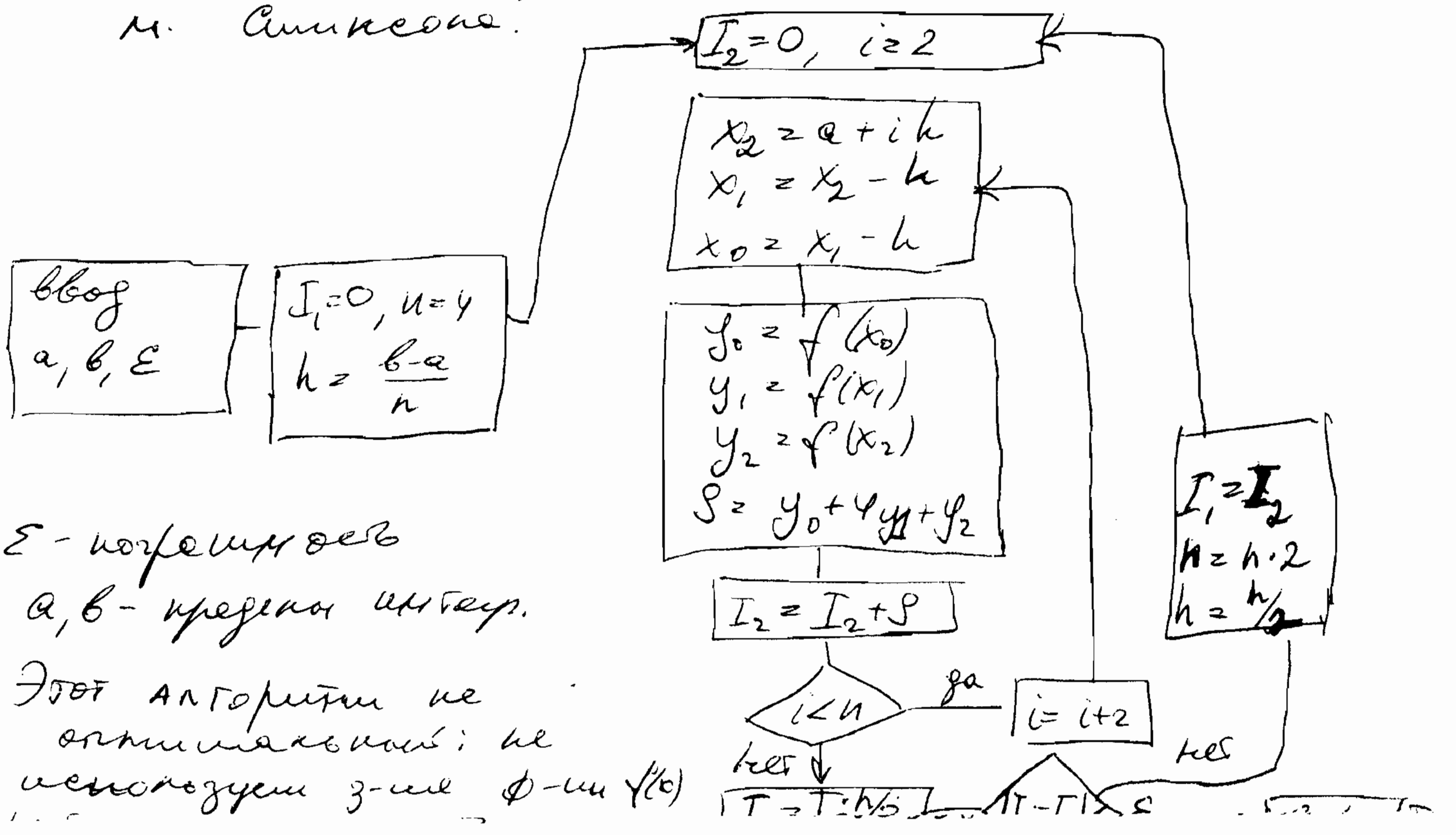
Пример. Вычислить методом Симпсона

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad n=10,\ h=0.1$$ (см. выше стр 4)

$$I=\frac{0.1}{3}\left[y_0+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)+y_{10}\right]=\ldots=0.785398$$

Результат совпадает с точным значением и в предыдущем примере, т.к. погрешность м. Симпсона $R_n=-\frac{h^4}{180}f^{IV}(x)$, а в формуле для уточнения значения интеграла главный член погрешности метода прямоугольников и трапеций (kh^2) уничтожается. Однако, м. Симпсона не требует двукратного вычисления интеграла, кроме того не нужно вычислять $y_{i-1/2}$ как для прямоугольников (метод средних).

Блок-схема простейшего алгоритма ~~на~~ решения м. Симпсона.



ε - погрешность

a, b - пределы интегр.

Этот алгоритм не оптимальный: не использует з-ие ф-ии f(x)

Процесс Эйткена

Даёт возможность оценить погрешность $O(h^p)$ и указывает алгоритм уточнения результатов.

Три раза вычисляем ин-л при шагах h_1, h_2, h_3, причём

$$h_2/h_1 = h_3/h_2 = q$$ (н-р при делении отрезка пополам $q = 0.5$)

Находим I_1, I_2, I_3

Тогда уточненное значение интеграла

$$I = I_1 - \frac{(I_1 - I_2)^2}{I_1 - 2I_2 + I_3}$$

порядок точности используемого уточнения

$$p = \frac{1}{\ln q} \ln \frac{I_3 - I_1}{I_2 - I_1}$$

Адаптивные методы

Используем различные значения шага считаем интеграл с большим шагом, если точность не достигнута, переразбиваем отрезок на более мелкие и т.д.

Другие методы:

Формулы Ньютона - Котеса используют полиномы Лагранжа (м. Симпсона — частный случай).

Метод Гаусса неравномерное разбиение отрезка (на самост. подготовку)

Формула Эйлера использует не только значение подынтегр. ф-ии, но и её производные.

и т.д.

Особые случаи

Если подынтегральная функция разрывна на отрезке интегрирования. (скачком конечен.)

Разбиваем интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

вычисляем численно

Несобственные интегралы

1. ∞ - бесконечная граница интегр.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad 0 < a < \infty$$

Замена $x = a/(1-t)$, т.е. интервал интегрирования переводим в $[0;1]$

При бесконечной граница заменяется большим числом, при этом важно учесть оценить остаточный член (погрешность)

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\ell f(x)\,dx + R$$

$$R = \int_\ell^\infty f(x)\,dx$$

2. Если $f(x)$ разрывна причем $\lim\limits_{x \to c} f(x) \to \infty$ $c \in [a, b]$ отрезок интегр.

То пытаемся выделить особенность

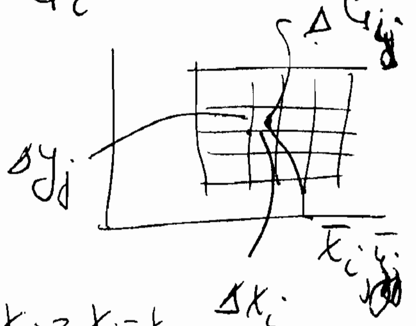
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx$$

вычисляем аналитически или хотя бы оцениваем.

Кратные интегралы

$$I = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$$

Разобьем область интегриров. на прямоугольники. ΔG_i



$$\iint_{\Delta G_i} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\,\Delta x\,\Delta y$$

по теореме о среднем

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$

$$\overline{f(x,y)} = \frac{1}{S}\iint_G f(x,y)\,dx\,dx$$

ф. ~~знач.~~ ф.ции $\overline{f(x,y)} = f(\bar{x}, \bar{y})$ — значение ф-ции в центре прямоугольника.

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \quad \bar{y}_j = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}$$

По всей области

$$\iint_G f(x,y) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

интегральная сумма.

Сходится к интегралу если $\Delta x, \Delta y \to 0$

Остаточный член

$$R = O\left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2}\right) = O(\Delta x^2 + \Delta y^2).$$

Эта формула применяется главным образом для вычисления интегралов по прямоугольным областям, но может быть обобщена на более сложные случаи. Прямоугольная область это все постоянные пределы интегрирования.

Второй метод вычисления кратных интегралов: последовательное сведение их к однократным.

$$\iint_G f(x,y)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx, \text{ где } F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Если область интегриров. сложная то она с помощью замены переменных сводится к прямоугольной или разбивается на более простые области.

Для выч-ия кратных ин-лов также ис-ся метод замены подынтегр. ф-ии интерполяц. многочленом (многочленом).